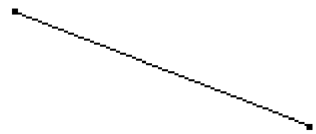
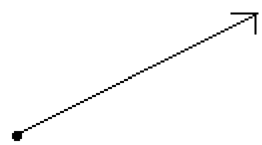
Conceptos básicos de geometría

La geometría trata de la medición y de las propiedades de puntos, líneas, ángulos, planos y sólidos, así como de las relaciones que guardan entre sí. A continuación veremos algunos conceptos relacionados con la geometría.

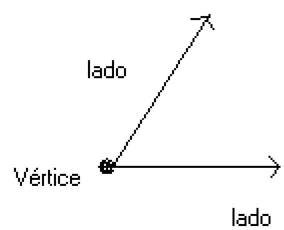
Segmento: es aquella parte de una línea recta que queda entre dos puntos señalados sobre ella.



Rayo o media línea: es aquella parte de una línea recta que queda a algún lado de un punto (el extremo) señalado sobre ella.



Ángulo: cuando dos rayos se intersectan en sus extremos. El punto de intersección se conoce con el nombre de vértice del ángulo.



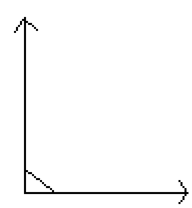
Unidades de medición de los ángulos.- las unidades de uso común para medir los ángulos son el radián y el grado. La medida de un ángulo es la cantidad de unidades de medición que contiene.

El grado: es una unidad de medida cuyo símbolo es º. Por consiguiente hay 360º en una revolución completa. En el sistema internacional de medidas, la unidad de medida angular es el radián.

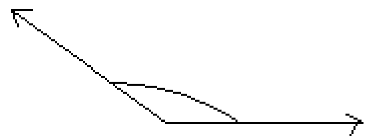
Los ángulos se pueden dividir en diferentes tipologías tomando como base los grados que tienen. Así, podemos distinguir entre cuatro tipos de ángulos.

Clases de ángulos

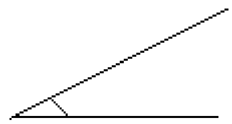
Ángulo recto: está formado por el cruce de dos rectas perpendiculares que forman la cuarta parte de una revolución, es decir, 90º.



Ángulo obtuso: un ángulo obtuso tiene una abertura mayor a la del ángulo recto, concretamente 180º.



Ángulo agudo: un ángulo agudo tiene una abertura menor a la del ángulo recto.

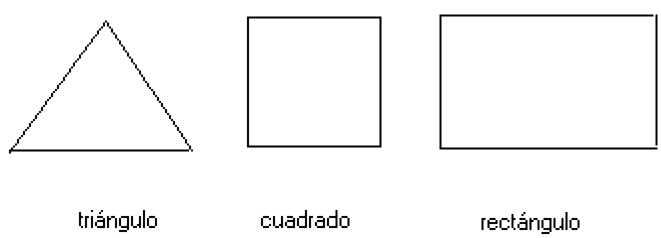


Ángulo plano: es aquel cuyos lados son semirrectas opuestas, además el ángulo es la mitad de una revolución, o sea, 180º.

Los polígonos

Un polígono es una figura plana y cerrada formada por tres o más segmentos de línea unidos en sus extremos. Estas figuras pueden dividirse en dos variantes:

- **Polígonos regulares:** son aquellos que tienen todos sus lados y ángulos congruentes. Además, todo polígono regular está inscrito en una circunferencia.
- **Polígono irregular:** son aquellos que no tienen todos sus lados y ángulos iguales.

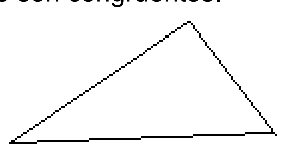


Clases de polígonos

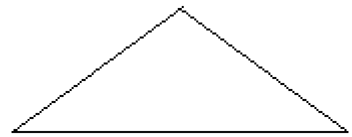
<u>Los triángulos:</u> son unos polígonos que tienen tres lados, que se unen en los vértices, y tres ángulos. Los triángulos se pueden clasificar por dos aspectos:

<u>Por sus lados:</u>

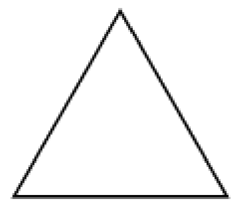
Escaleno: sus lados y sus ángulos no son congruentes.



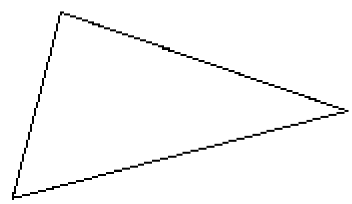
Isósceles: es un tipo de triángulo que tiene dos lados iguales. Los ángulos opuestos a estos lados iguales serán iguales.



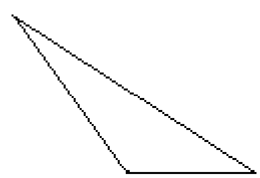
Equilátero: es un triángulo que tiene sus tres lados iguales y sus ángulos también son iguales.



Por sus ángulos:
Acutángulo: un triángulo acutángulo tiene sus tres ángulos agudos.

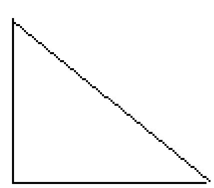


Obtusángulo: este tipo de triángulo tiene un ángulo obtuso y dos agudos. El lado opuesto al ángulo obtuso será de mayor longitud.



Rectángulo: es aquel triángulo que tiene un ángulo recto y dos agudos. El lado opuesto al ángulo recto se llama hipotenusa y los otros dos lados se llaman catetos. Para calcular cuánto mide la hipotenusa se aplica el ***"Teorema de Pitágoras"*** que consiste en que la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados (catetos).
Fórmula: $a^2 + b^2 = c^2$

Ejemplo: un triángulo rectángulo tiene catetos de 5 y 4 unidades de longitud.
$H^2 = 5^2 + 4^2 = 25 + 16 = 41$
$H = \sqrt{41} = c^2 + c^2$.

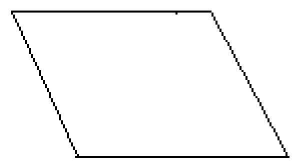


Cuadriláteros: Un cuadrilátero es un polígono que tiene cuatro lados y cuatro ángulos. Los lados de un cuadrilátero pueden ser consecutivos u opuestos. De acuerdo a la igualdad o al paralelismo de sus lados podemos clasificarlos en:

Según paralelismo:

Trapecio: El trapecio es un polígono de cuatro lados, pero sus cuatro ángulos son distintos de 90º.

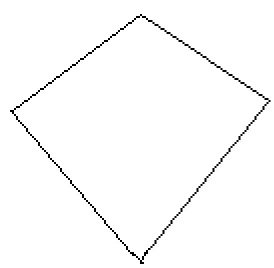
Paralelogramo: El paralelogramo es un polígono de cuatro lados paralelos dos a dos.



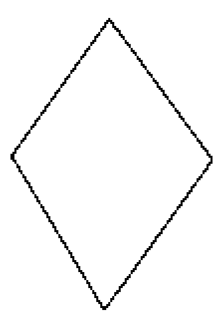
Rectángulo: El rectángulo es un polígono de cuatro lados, iguales dos a dos. Sus cuatro ángulos son de 90 grados cada uno.

Según la igualdad:

Romboide: tiene dos pares de lados consecutivos iguales.



Rombo: El rombo es un polígono de cuatro lados iguales, pero sus cuatro ángulos son distintos de 90ª.



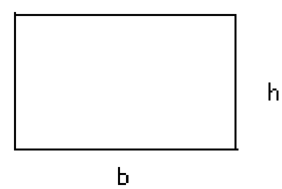
La suma de todos los ángulos interiores de todo cuadrilátero es de 360º.

El cuadrado puede situarse en ambas categorías.

Cómo calcular el perímetro de las figuras planas
Se denomina perímetro de una figura plana a la suma de las longitudes de sus lados. De este modo, el perímetro de un triángulo cuyos lados miden 5 cm, 6 cm y 10 cm es de 5+6+10=21 cm.

Para calcular el perímetro es necesario conocer la longitud de todos los lados de la figura. Se acostumbra a representar la mitad del perímetro de una figura con la letra p.
Perímetro = 2 · p

Área del rectángulo: como en un rectángulo los lados son iguales dos a dos, obtenemos la siguiente fórmula:



Perímetro = 2 . p = b+b+h+h= 2 · b + 2 · h

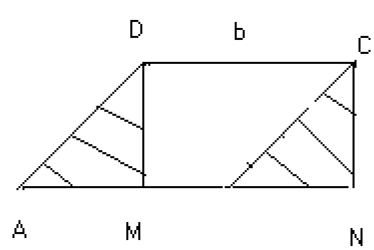
Perímetro de los polígonos regulares: como en los polígonos regulares todos los lados son iguales obtendremos las siguientes fórmulas:

Triángulo equilátero perímetro =	c + c + c =	3 · c
Cuadrado perímetro =	c + c + c + c =	4 · c
Pentágono perímetro =	c + c + c + c + c =	5 · c

El área de las figuras planas
El área de una figura es la porción del plano que cubre. Para medir las superficies se utiliza como unidad de medida el cuadrado cuyo lado es de longitud 1.

Área del rectángulo: es el área más sencilla para calcular. Es el resultado de multiplicar la longitud de sus lados o también, como se dice habitualmente, se obtiene multiplicando la base (b) por la altura (h).
Fórmula: **Área del rectángulo = base * altura = b * h**

Área del paralelogramo: Si consideramos el paralelogramo ABCD. La base AB desde C y D se hacen perpendiculares sobre la base AB.

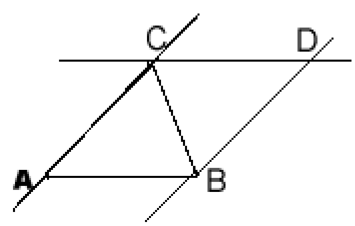


Los triángulos ADM y BCN son iguales. Por tanto, el área del paralelogramo ABCD es la misma que la del rectángulo MNCD. Observamos que las dos figuras tienen la misma base y la misma

altura. Este proceso nos permite afirmar que el área de un paralelogramo es, también, el producto de su base por su altura.
Fórmula: **Área del paralelogramo = base * altura = b * h**

Área del cuadrado: en un cuadrado la base y la altura son iguales a su lado y por tanto:
Fórmula: **Área del cuadrado de lado c = lado^2 = c^2**

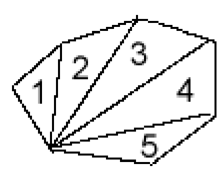
Área del triángulo: consideremos un triángulo cualquiera ABC, de base AB. Dibujemos una paralela a AB que pase por C y una paralela a AC que pase por B. Éstas se encuentran en un punto D.



Los triángulos ABC y BCD serán iguales. Por tanto, la superficie del paralelogramo ABCD será el doble del área del triángulo ABC.
Fórmula: **Área del paralelogramo ABCD = 2 · área del triángulo ABC**
O bien,
Área del triángulo ABC = área del paralelogramo : 2
Como la base y la altura del paralelogramo son la base y la altura del triángulo obtendremos:
Fórmula: **Área del triángulo = base por altura dividido por 2 = b * h / 2**

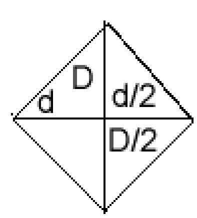
El área de las figuras planas

Continuamos viendo cómo se calcula el área de las figuras planas. Veamos:
Para calcular el área de otros polígonos se dibujan las diagonales necesarias con el fin de que queden descompuestos en triángulos; después se calcula el área de estos triángulos y se suman los valores obtenidos.



Área = AT 1 + AT 2 + AT 3 + AT 4 + AT 5.

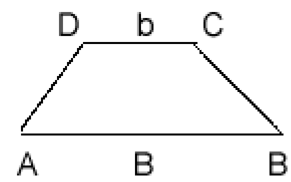
Área del rombo: en el rombo, las dos diagonales, d y D, lo descomponen en cuatro triángulos iguales que tienen como base la mitad de una diagonal (base = b = d : 2 y como altura la mitad de la otra diagonal (altura = h = D : 2).



La superficie de cada uno de los triángulos será:

A = (base . altura) / 2 = (d/2)*(D/2) / 2 = d * D / 8
Y, en consecuencia, el área del rombo será el área de uno de estos triángulos multiplicada por 4:
Área del rombo = 4 * área del triángulo = 4 * (d * D) / 8 = (d * D) / 2

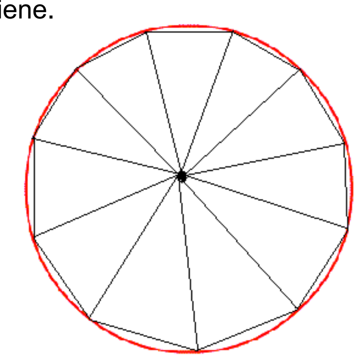
Área del trapecio: considera un trapecio ABCD de base AB. Se acostumbra a denominar bases a los lados paralelos del trapecio. El lado más grande de los dos será la base mayor, que representaremos por B, y el otro la base menor, que representaremos con b.



La diagonal divide el trapecio en dos triángulos: ABC, de base AB, y ACD, de base DC. Ambos triángulos tienen la misma altura que el trapecio. El área del trapecio será la suma de las áreas de los dos triángulos. El triángulo ABC tiene como base la mayor del trapecio y su altura es la del trapecio; el triángulo ACD tiene como base la menor del trapecio y su altura es la del trapecio.
Área del trapecio = (B · h) : 2 + (b · h) : 2 = (B · h + b · h) · 2 = (B + b) · h : 2 =
(B + b : 2) · h

Fórmula que se suele enunciar así: el área del trapecio es igual al resultado de multiplicar la semisuma de las bases por la altura.

Área de los polígonos regulares: consideremos diversos polígonos regulares, como un triángulo equilátero, un cuadrado, un hexágono regular o un octógono regular. Todos ellos tienen un centro definido. Si unimos dicho centro con los vértices de cada uno de los polígonos, se descompondrán en tantos triángulos como lados tiene.



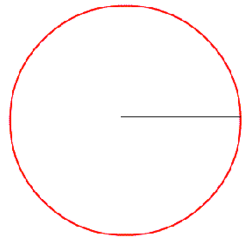
Todos los triángulos resultantes de la descomposición son iguales y tienen como base un lado (c), y su altura es la apotema del polígono (a). El área de estos triángulos será:
Fórmula: **Área del triángulo = (c · a) : 2**

Por lo tanto, el área del polígono regular será el resultado de multiplicar esta área por el número de triángulos que se han formado. A (polígono) = número de lados · área del triángulo.
Área polígono regular de n lados = n· (c·a :2) = (n·c·a) : 2 = ((n · c) : 2)· a
Cn es el perímetro del polígono y, como ya hemos dicho que se acostumbra a representar con la p la mitad del perímetro (semiperímetro), tendremos que
(c · n) : 2 = p, y podemos formular:
Área del polígono regular = semiperímetro por apotema = p · a

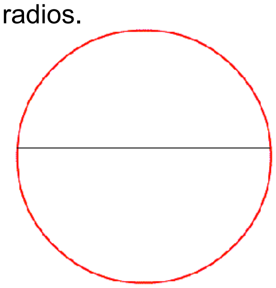
La circunferencia y el círculo

La circunferencia es una línea curva cerrada, cuyos puntos tienen la propiedad de equidistar de otro punto llamado centro. El término equidistar significa que están a la misma distancia. Los puntos de la circunferencia y los que se encuentran dentro de ella forman una superficie llamada círculo.

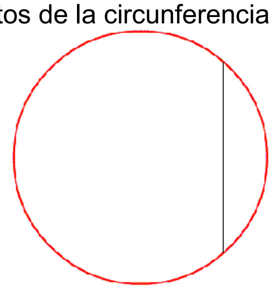
Principales elementos de la circunferencia.- A continuación le explicamos las partes que conforman una circunferencia.
Radio: es el segmento que une el punto centro con cualquier punto de la circunferencia. El radio permite nombrar a la circunferencia y lo identificamos con la letra **r**.



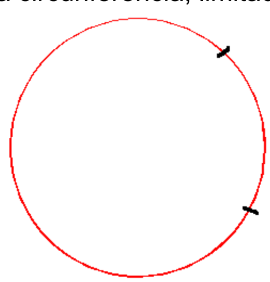
Diámetro: segmento que une dos puntos de la circunferencia, pasando por el punto centro. El diámetro equivale a la medida de dos radios.



Cuerda: es un trazo que une dos puntos de la circunferencia.



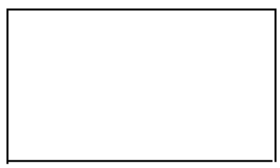
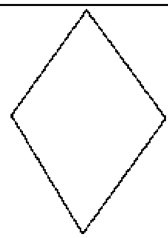
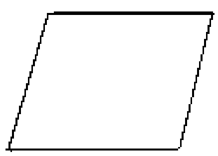
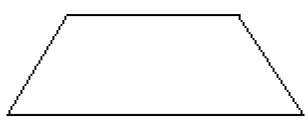
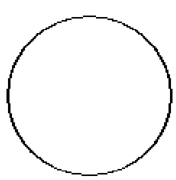
Arco: es una parte o subconjunto de la circunferencia, limitada por dos puntos de ella.



Cómo calcular la longitud de una circunferencia
Los matemáticos griegos decidieron indicar, con una letra de su alfabeto, el número de veces que la circunferencia contiene su propio diámetro. La letra escogida fue la letra π. Del número π, se conocen muchas cifras (tiene infinitas). Como las primeras son 3,141592653589...pero normalmente consideramos como valor de π 3,14.
Fórmula: Longitud de la circunferencia = π . diámetro
Como el diámetro es el radio multiplicado por dos (d= 2r), se suele escribir:

Perímetro de la circunferencia = π * diámetro = π * 2 * r = 2 * π * r
El área del círculo se calcula de la siguiente forma:
Recordemos: A (polígono regular) = semiperímetro . apotema.
Como el perímetro del círculo es $2 \cdot \pi \cdot r$, el semiperímetro será $\pi \cdot r$, y la apotema será el mismo radio del círculo; por lo tanto:
A (círculo) = (π * r) * r = π * r^2 = π * r^2

Resumen de fórmulas

FIGURA	PERÍMETRO	AREAS
	P = 4 · a	A = a ^{2} A = d ^{2} / 2
	P = 2 · (a+b)	A = a · b
	P = 4 · a	A = a . h = (e + f) / 2 E y f son diagonales
	P = 2 · (a + b)	A = a · h
	P = a + b + c + d	A = (a + c) / 2 · h
	P = 2 · π · r	A = π · r ^{2}